

TRAVAUX DIRIGES 2024-2025

BAC D : 2025

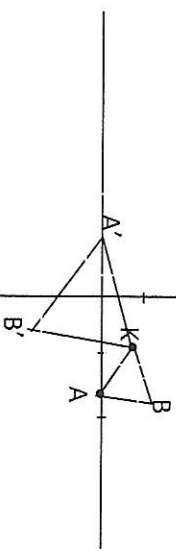
CLE DE CORRECTION : MATHÉMATIQUES

TID du 07/05/2025

Éléments de réponse	CA = 0,5	CM = 1	CO = 0,5	Total
<p>Problème 1</p> <p>1) Déterminons une équation cartésienne du plan (Q).</p> $(Q): \begin{cases} x = \alpha + \sqrt{2} \\ y = -3\beta + \pi, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$ <p>Donc une équation cartésienne de (Q) est $z = -1$.</p>	Le candidat	Le candidat	Le candidat	2 pt
<p>2)</p> <p>a. Démontrons que l'ensemble (Δ) est une droite</p> $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x - y + z - 2)^2 + (2x + y - z + 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y + z - 2)^2 = 0 \\ (2x + y - z + 1)^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ <p>Soit (P_1) et (P_2) les plans d'équations cartésiennes respectives</p> $x - y + z - 2 = 0 \text{ et } 2x + y - z + 1 = 0.$ $\vec{n}_1(1; -1; 1) \text{ et } \vec{n}_2(2; 1; -1)$ <p>sont des vecteurs normaux respectifs à (P_1) et (P_2).</p> <p>(P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles. En effet :</p> $\vec{n}_2 = \alpha \vec{n}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$ <p>Ce qui est absurde.</p> <p>Les plans (P_1) et (P_2) sont donc sécants. D'où (Δ) est une droite.</p>	Identifie (Δ) par la relation donnée de l'énoncé. Reconnait un système d'équations cartésiennes d'une droite	Trouve le système	Trouve :	5 pt
<p>b. Déterminons une représentation paramétrique de (Δ)</p> <p>Un système d'équations cartésiennes de (Δ) est</p> $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$	Identifie (Δ)	Utilise une méthode pour déterminer une représentation paramétrique de (Δ)	Trouve un système d'équations cartésiennes de (Δ)	2 pt

<p>En posant $z = \gamma ; \gamma \in \mathbb{R}$, on obtient</p> $\begin{cases} x - \gamma + z - 2 = 0 \\ 2x + \gamma - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \gamma = -\gamma + 2 \\ 2x + \gamma = \gamma - 1 ; (\gamma \in \mathbb{R}). \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \gamma = \gamma - \frac{5}{3} ; (\gamma \in \mathbb{R}). \\ z = \gamma \end{cases}$ <p>Le dernier système obtenu est une représentation paramétrique de (Δ).</p>				
<p>3) <u>Déterminons l'intersection de (Q) et (Δ)</u> Soit $M(x ; \gamma ; z)$ un point de l'espace. On a :</p> $M \in (Q) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (Q) \\ M \in (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ x = \frac{1}{3} \\ \gamma = \gamma - \frac{5}{3} \\ z = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \gamma = -\frac{8}{3} \\ z = -1. \end{cases}$ <p>D'où l'intersection de (Q) et (Δ) est le singleton formé du point $I(\frac{1}{3} ; -\frac{8}{3} ; -1)$.</p>	<p>Identifie (Q) et (Δ)</p>	<p>Utilise une méthode pour déterminer l'intersection de (Q) et (Δ)</p>	<p>Trouve le point d'intersection de coordonnées</p> $(\frac{1}{3} ; -\frac{8}{3} ; -1)$	<p>3,5</p>
<p>4) <u>Problème 2</u></p> <p>a. <u>Déterminons l'écriture complexe de l'application</u> Soit $M(x ; \gamma)$ et $M'(x' ; \gamma')$ deux points du plan d'affixes respectives z et z'. On a :</p> $r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma + 1 \\ \gamma' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\gamma \end{cases}$ $\Leftrightarrow x' + i\gamma' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma + 1 + i(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\gamma)$	<p>Utilise l'expression analytique de r.</p>	<p>Passer de l'expression analytique à l'écriture complexe</p>	<p>Trouve l'écriture complexe de r.</p>	<p>3,5</p>

<p>$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(x + iy) + 1$ $\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z + 1.$ L'écriture complexe de r est donc $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z + 1.$</p>				
<p>b. <u>Donnons la nature précise</u> der puis précisons ses éléments caractéristiques L'écriture complexe de r est sous la forme $z' = az + b$ avec $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $b = 1$. De plus $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc r est la rotation de d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = z_K$. Le centre est point K.</p>	Utilise l'écriture complexe de r 	Ecrit $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Trouve $ a = 1$ 	Trouve la nature de r et les trois éléments caractéristiques de r 	4,5
<p>c. <u>Déterminons la nature du triangle</u> KAB $KA = KB$ $r(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{mes}(\widehat{KA; KB}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k ; k \in \mathbb{R}. \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left \frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} \right = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k ; k \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} = e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{cases}$ Ainsi KAB est un triangle équilatéral.</p>	Utilise la nature de et les éléments caractéristiques de r 	Traduis convenablement la relation $r(A) = B$. 	Trouve : $\left \frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} \right = 1$ $\arg\left(\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}\right)$ KAB est équilatéral 	4
<p>5) a. <u>Déterminons l'écriture complexe</u> de $h \circ r$ h est une homothétie de rapport -2. Son écriture complexe est donc $z' = -2z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$. Son centre étant le point K, on obtient $b = 3z_K$. Par conséquent l'écriture complexe de h est $z' = -2z + \frac{3}{2} +$</p>	Utilise le centre et le rapport de h Utilise l'écriture complexe de h Utilise l'écriture complexe de r	Utilise une méthode pour déterminer l'écriture complexe de h Compose convenablement les écritures complexes de h et de r .	Trouve : $z' = -2z + b$ $b = 3z_K$	

<p>$\frac{3i\sqrt{3}}{2}$, (*)</p> <p>L'écriture complexe de r est $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z + 1$. (**)</p> <p>De (*) et (**) on obtient successivement :</p> $h \circ r : z' = -2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 \right] + \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ $h \circ r : z' = (-1 - i\sqrt{3})z - \frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ <p>La dernière expression est l'écriture complexe de $h \circ r$.</p>	<p> </p>	<p> </p>	<p>$z' = (-1 - i\sqrt{3})z - \frac{1}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$</p> <p> </p> <p>(4 pondérations ici)</p>	<p>6</p>
<p>b. Prouvons que φ est une similitude plan directe</p> <p>Par hypothèse $\varphi = h \circ r$. Donc φ est une similitude plane directe. Puisque h et r ont le même centre K et $-1 - i\sqrt{3} = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$ alors φ est la similitude plane directe de centre K, de rapport 2 et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.</p>	<p>Utilise</p> <p>$\varphi = h \circ r$</p> <p> </p>	<p>Utilise des propriétés pour prouver la nature φ et pour déterminer les éléments caractéristiques de φ.</p> <p> </p>	<p>Prouve la nature de φ</p> <p>Trouve les éléments caractéristiques de φ</p> <p> </p>	<p>4,5</p>
<p>c. Construisons le triangle KAB puis son image par φ. Soit A' et B' les images respectives des points A et B par φ. L'image du triangle équilatéral KAB par φ est le triangle équilatéral $KA'B'$ tel que $KA' = 2KA$ et $\text{mes}(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA'}) = \frac{4\pi}{3}$.</p> 	<p>Identifie la position de A et les éléments caractéristiques de φ.</p> <p> </p>	<p>Réalise le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$</p> <p>Ecrit</p> <p>$KA' = 2KA$ et $\text{mes}(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA'}) = \frac{4\pi}{3}$</p> <p> </p>	<p>Trouve que $KA'B'$ est équilatéral</p> <p> </p> <p>Construit les points B, A' et B'.</p> <p> </p>	<p>7</p>

Problème 3

Partie A

6) a. Démontrons que l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .

$$\begin{cases} f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit D l'ensemble de définition de f .

$$D =]-\infty; 0] \cup \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\}.$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0.$$

$$\text{Donc } D =]-\infty; 0] \cup (]0; +\infty[\cap]0; +\infty[)$$

$$=]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[\\ = \mathbb{R}$$

b. Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0.

▪ Continuité

$$\text{On a : } 0 \in D \text{ et } f(0) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{0}{2}} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}) = -1 - \sqrt{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2} \right) = -1 - \sqrt{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 \ln x) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{3}{2}x^2 \right) = 0; \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -1 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Alors } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0).$$

D'où f est continue en 0

▪ Dérivabilité

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{-1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} + 1 + \sqrt{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{2}(1 - e^{\frac{x}{2}})}{x} \end{aligned}$$

Identifie f

|

Pose

$$D =]-\infty; 0] \cup \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\}$$

||

Trouve effectivement $D = \mathbb{R}$.

|

3

Identifie f et 0

|

Utilise la condition de continuité de f en 0

|

Trouve :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1 - \sqrt{2}$$

|

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -1 - \sqrt{2}$$

|

$$f(0) = -1 - \sqrt{2}$$

|

f est continue en 0

|

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

|

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

|

f n'est pas dérivable en 0.

|

6

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(1-e^t)}{2t} \text{ en posant } t = \frac{x}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{car } \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t-1}{t} \right) = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est un nombre réel.

Alors f est dérivable à gauche en a et $f'_g(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x \ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1 + \sqrt{2}}{x} \right)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{2}x \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, avec $x > 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

Ainsi, f n'est pas dérivable à droite en 0 .

Au total, f n'est pas dérivable en 0 .

c. Interprétation de la dérivabilité de f en 0 .

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc la courbe (C) admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 0 définie par :

$$(T_g): \begin{cases} y = f'_g(0)(x-0) + f(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Donc $(T_g): \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 - \sqrt{2} \\ x \leq 0 \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, donc la courbe (C) admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 définie par :

$$(T_d): \begin{cases} x = 0 \\ y \leq f(0) \end{cases} \text{ Donc } (T_d): \begin{cases} x = 0 \\ y \leq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

	Identifie	Pose	Trouve	
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$	$(T_g): \begin{cases} y = f'_g(0)x + f(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$ $(T_d): \begin{cases} x = 0 \\ y \leq f(0) \end{cases}$	$(T_g): \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 - \sqrt{2} \\ x \leq 0 \end{cases}$ $(T_d): \begin{cases} x = 0 \\ y \leq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$	4

<p>7) a. <u>Etude des variations de la fonction f.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <u>Limites de faux bornes de D.</u> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{z}}) = -1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{z}} = 0$ <p>car</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2} \right)$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} - \frac{1 + \sqrt{2}}{x^2} \right)$ <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2}}{x^2} = 0$.</p> <p>Donc</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ <ul style="list-style-type: none"> <u>Ensemble de continuité et de dérivabilité</u> La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est continue et dérivable sur $] -\infty; 0[$, donc la fonction f est continue et dérivable sur $] -\infty; 0[$. Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^2$ sont continues et dérivables sur $] 0; +\infty[$. Donc la fonction est continue et dérivable sur $] 0; +\infty[$. De plus f n'est pas dérivable en 0. <p>f est dérivable sur les intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$.</p> <p>$\forall x \in] -\infty; 0[$, $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{z}}$</p> <p>$\forall x \in] 0; +\infty[$, $f'(x) = 2x(\ln x - 1)$</p> <ul style="list-style-type: none"> <u>Sens de variation de f</u> <p>$\forall x \in] -\infty; 0[$, $f'(x) < 0$ car $e^{\frac{x}{z}} > 0$.</p> <p>$\forall x \in] 0; +\infty[$, $2x > 0$. Donc le signe de f' sur $] 0; +\infty[$ est celui de la fonction d'expression explicite $\ln x - 1$.</p>	<p>Identifie les deux expressions de f</p> <p> </p>	<p>Justifie les limites </p> <p>Utilise les propriétés de continuité et de dérivabilité nécessaires</p> <p> </p> <p>Utilise les formules de dérivation d'une somme, d'un produit </p> <p>Dresse le tableau de variations de f </p>	<p>Trouve : </p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ </p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ </p> <p>Ensemble de continuité et de dérivabilité de f. </p> <p>$\forall x \in] -\infty; 0[$, $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{z}}$ </p> <p>$\forall x \in] 0; +\infty[$, $f'(x) = 2x(\ln x - 1)$ </p> <p>$\forall x \in] -\infty; 0[$, $f'(x) < 0$ </p> <p>$\forall x \in] 0; +\infty[$, $(\ln x - 1) = 0$ </p> <p>$\Leftrightarrow x = e$ </p> <p>$\forall x \in] 0; +\infty[$, $(\ln x - 1) < 0$ </p> <p>$\Leftrightarrow x < e$ </p> <p>Le signe de f' </p> <p>Le sens de variation de f. </p> <p>$f(e) = -\frac{1}{2}e^2 - 1 - \sqrt{2}$ </p> <p>Tableau de variations correct </p> <p> </p>	<p>15,5</p>
--	--	--	---	-------------

$$(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = e \quad \text{et} \quad (\ln x - 1) < 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Ainsi,
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; e[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]e; +\infty[, f'(x) > 0 \\ f'(e) = 0. \end{cases}$$

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; e]$ et strictement croissante sur $] e; +\infty [$.

• Tableau de variations

$$f(e) = -\frac{1}{2}e^2 - 1 - \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	0	$+$
$f(x)$	-1	$-1 - \sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}e^2 - 1 - \sqrt{2}$	$+\infty$

b. Etude des branches infinies de la courbe (C)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ alors la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln x - \frac{3}{2} - \frac{1 + \sqrt{2}}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Identifie les limites de f aux bornes de D. |

Utilise les méthodes de détermination des branches infinies ||

Trouve : la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. |

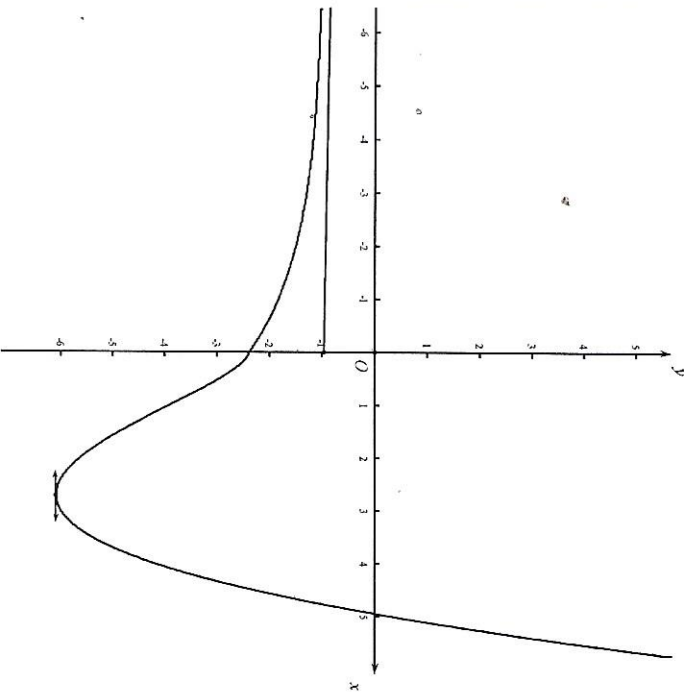
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \quad |$$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au

3,5

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{3}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{x^2} \right) = +\infty$; donc
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C) admet une branche parabolique
 de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

c. Construction de la courbe (C).



Identifie le repère
 (O, \vec{i}, \vec{j})

voisinage de $+\infty$.

Trace la droite d'équation
 $y = -1$

Trace les deux demi-tangentes.

Marque les points de coordonnées $(0; -1 - \sqrt{2})$ et $(e; -\frac{1}{2}e^2 - 1 - \sqrt{2})$

Trace la courbe

2,5

8) Calculons en unité d'aire, l'aire de la surface occupée par les cultures maraichères.

Soit A cette aire :

$$A = - \int_1^e f(x) dx \cdot ua = \int_1^e - \left(x^2 \ln x - \frac{3}{2} x^2 - 1 - \sqrt{2} \right) dx \cdot ua$$

$$A = - \int_1^e (x^2 \ln x) dx + \int_1^e \left(\frac{3}{2} x^2 + 1 + \sqrt{2} \right) dx$$

Identifie A

|

Pose

$$A = - \int_1^e f(x) dx \cdot ua$$

Utilise la méthode d'intégration par parties.

Trouve A

||

3,5

Posons: $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$. Donc $u(x) = \frac{1}{3}x^3$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$A = -\left[\frac{1}{3}x^3 \ln x \right]_1^e + \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx + \left[\frac{1}{2}x^3 + x + x\sqrt{2} \right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^e + \frac{1}{2}e^3 + e + e\sqrt{2} - \frac{1}{2} - 1 - \sqrt{2}$$

$A = \left(\frac{5}{18}e^3 + (e-1)(1+\sqrt{2}) - \frac{11}{18} \right) \cdot ua$

Partie B

9) Calculons les montants de la production annuelle de noix de coco en 2010 et en 2011.

$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
 En 2010, $n = 0$ et $|u_0| = 2$. Alors en 2010, le montant est de 2 millions de francs.
 En 2011, $n = 1$ et $|u_1| = |f(u_0)| = |f(2)|$
 $= |4ln2 - 6 - 1 - \sqrt{2}| = 7 + \sqrt{2} - 4ln2$
 Alors en 2011, le montant est 5641625 francs.

10) a. Etudions le sens de variation de la fonction numérique g .
 Le fonctions g est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, g'(x) < 0$. Alors g est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$.
 $\forall x \in]-1; 1[, g'(x) > 0$. Alors g est strictement croissante sur $] -1; 1[$.

Identifie le montant de production annuelle de noix de coco $ u_n $ et u_0 . Identifie l'unité de monnaie (le million de francs)	Pose : $u_1 = f(u_0)$ 	Trouve : $ u_0 = 2$ le montant en 2010 $ u_1 = f(u_0) = 7 + \sqrt{2} - 4ln2$ le montant en 2011	4,5
Identifie g par son expression explicite	Utilise la formule de dérivation du produit Utilisé la propriété convenable d'étude du sens de variation d'une fonction.	Trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, g'(x) < 0$. $\forall x \in]-1; 1[, g'(x) > 0$. Le sens de variation de g	5

<p>b. <u>Démontrons que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique x_0</u></p> <ul style="list-style-type: none"> g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$. $g(]-\infty; -1[) =]g(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[=]0; +\infty[$ $2 \in]0; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 2$ admet une solution x_0 dans l'intervalle $]-\infty; -1[$. g est continue et strictement croissante sur $]-1; 1[$. $g(]-1; 1[) =]g(-1); g(1)[=]0; 4e^{-2}[$ $2 \notin]0; 4e^{-2}[$, donc l'équation $g(x) = 2$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-1; 1[$. g est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. $g(]1; +\infty[) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(1) =]0; 4e^{-2}[$ $2 \notin]0; 4e^{-2}[$, donc l'équation $g(x) = 2$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$. <p>En conclusion, l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution réelle x_0.</p>	<p>Identifie l'équation $g(x)=2$ et le sens de variation de g</p> <p> </p>	<p>Utilise une méthode correcte de démonstration de l'existence et de l'unicité de solution d'équation</p> <p> </p> <p>Utilise la propriété permettant de déterminer l'image d'un intervalle par une fonction strictement monotone</p> <p> </p>	<p>Trouve :</p> <p>➤ $g(x) = 2$ admet une solution x_0 dans l'intervalle $]-\infty; -1[$.</p> <p>➤ l'équation $g(x) = 2$ n'admet pas de solution dans $]-1; 1[$.</p> <p>➤ l'équation $g(x) = 2$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.</p> <p>➤ En conclusion, l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution réelle x_0.</p>	7
<p>c. <u>Prouve que: $-2 < x_0 < -1$</u></p> <p>g est continue et strictement décroissante sur $]-2; -1[$ et $g(]-2; -1[) =]g(-1); g(-2)[=]0; e^2[$.</p> <p>On a $2 \in]0; e^2[$, donc $x_0 \in]-2; -1[$.</p>	<p>$]-2; -1[$ </p>	<p>Utilise le théorème des valeurs intermédiaires</p> <p> </p>	<p>Justifie que $x_0 \in]-2; -1[$</p>	2
<p>d. <u>Vérifions que $x_0 = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$.</u></p> <p>On a : $g(x_0) = \left(-\sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}\right)^2 e^{-x_0}$</p> <p>$= 2e^{x_0} e^{-x_0}$</p> <p>$= 2$</p> <p>Donc on a : $x_0 = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$</p>	<p>Identifie $-1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$</p> <p> </p>		<p>Trouve :</p> <p>$g(x_0) = 2$ </p>	1
<p>11) a. <u>Démontrons que pour tout élément x de $I =]-2; -1[$, $f(x)$ appartient à I.</u></p>	<p>Identifie I </p>	<p>Pose $f(I) =]f(-1); f(-2)[$.</p> <p> </p>	<p>$f(I) \subset I$ </p>	2

<p>f est strictement décroissante sur I, $f(0) = [f(-1), f(-2)]_1$, $f(1) = [-1 - \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}; -1 - \sqrt{2}e^{-1}] \subset [-2, -1]$ d'où le résultat.</p>				
<p>b. <u>Démontrez que pour tout élément x de I, $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$</u> $\forall x \in I, f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}$ $x \in I \Leftrightarrow -2 < x < -1 \Leftrightarrow f'(-1) < f'(x) < f'(-2)$ $\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-1}{2}} < f'(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1} < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-1}{2}}$ $\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-1}{2}} < f'(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-1}{2}}$ D'où le résultat.</p>	<p>f' </p>		<p>$f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$ </p>	<p>1</p>
<p>c. <u>Utilisons le théorème de l'inégalité des accroissements finis pour montrer que pour tout élément x de I, on a</u> $f(x) - x_0 \leq \frac{1}{2} x - x_0$. Soit $x \in I$, on a : $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$, et $x_0 \in I$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $f(x) - f(x_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}e} x - x_0$ or $x_0 = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$ c-à-d $f(x_0) = x_0$ Donc $f(x) - x_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}e} x - x_0$ or $\frac{1}{\sqrt{2}e} < \frac{1}{2}$ D'où $f(x) - x_0 \leq \frac{1}{2} x - x_0$.</p>		<p>Utilisé $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$ $f(x_0) = x_0$ </p>	<p>$f(x) - x_0 \leq \frac{1}{2} x - x_0$ </p>	<p>2,5</p>
<p>12) a. <u>Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.</u> On a : $u_0 = -2$ et $-2 \in I$ donc $u_0 \in I$. Supposons que pour $k, u_k \in I$ P_n et démontrons $u_{k+1} \in I$ $u_k \in I$, donc $f(u_k) \in I$ d'après 11-a) Donc on a $u_{k+1} \in I$. D'où $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.</p>	<p>Identifie la suite (u_n) </p>	<p>Utilisé le principe du raisonnement par récurrence.</p>	<p>Réussit la démonstration </p>	<p>2</p>

<p>b. <u>Prouvons alors que pour tout entier naturel n,</u> $u_{n+1} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_n - x_0$. On a $f(x) - x_0 \leq \frac{1}{2} x - x_0$, $\forall x \in I$. Or $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ Donc $f(u_n) - x_0 \leq \frac{1}{2} u_n - x_0$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ D'où $u_{n+1} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_n - x_0$</p>	<p>Identifie $f(u_n) = u_{n+1}$</p>	<p>Utilise $f(x) - x_0 \leq \frac{1}{2} x - x_0$</p>	<p>$u_{n+1} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_n - x_0$</p>	<p>2</p>
<p>c. <u>Déduisons – en que pour tout entier naturel n,</u> $u_n - x_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ On a $u_{n+1} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_n - x_0$ Donc : $u_n - x_0 \leq \frac{1}{2} u_{n-1} - x_0$ $u_{n-1} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_{n-2} - x_0$ $u_{n-2} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_{n-3} - x_0$ $u_1 - x_0 \leq \frac{1}{2} u_0 - x_0$ En multipliant ces inégalités membre à membre et en simplifiant, on a : $u_n - x_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 - x_0$. Or $-1 < u_0 - x_0 < 0$. Donc $u_0 - x_0 < 1$ D'où $u_n - x_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$</p>	<p>Identifie $u_{n+1} - x_0 \leq \frac{1}{2} u_n - x_0$</p>		<p>$u_n - x_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$</p>	<p>1</p>
<p>d. <u>Déterminons le montant autour duquel stabilisera à long terme la production annuelle de noix de coco</u> A long terme, $n \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Ainsi, ce montant est x_0 millions de francs.</p>	<p>Identifie $u_n - x_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$</p>	<p>Utilise la propriété de convergence visée par la question</p>	<p>Ce montant est x_0 millions de francs.</p>	<p>2</p>