Composition terminale D

Contexte : Activité culturelle

A la fin de l'année scolaire, une école de la place organise une activité culturelle.

Au cours de cette activité, Il est prévu un jeu de tirage de boule dans une urne. L'urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. Ces boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement sans remise deux boules de cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- Un joueur perd un point lorsqu'on tire une boule rouge,
- Un joueur marque zéro point lorsqu'on tire une boule verte,
- Un joueur marque un point lorsqu'on tire une boule bleue ; on dit dans ce cas-là qu'il gagne la partie.

Les joueurs qui ont gagné la partie sont placés en des points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives $Z_A = 4i$, $Z_B = 3 + i$ et $Z_C = -3 + i$. Soit g la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

Le trophée prévu pour le meilleur du collège est posé sur sa base sur un petit domaine qu'il occupe totalement. Ce domaine est délimité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.

Gbèdo se demande comment peut- on gagner ce jeu puis connaitre l'aire du domaine.

Tâche : tu vas aider Gbèdo à travers la résolution des problèmes suivants.

Problème 1 :

1a-) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?

b-) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différents ?

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur au cours de ce jeu.

a-) Détermine la loi de probabilité de X.

b-) Détermine l'espérance mathématique et la variance de X.

3) Soit n un entier naturel $n \geq 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note Y la variable aléatoire réelle qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et Pn la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a-) Détermine en fonction de n, la probabilité Po pour que le joueur ne gagne aucune partie au cours des n parties.

b-) Détermine en fonction n la probabilité Pn pour que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

c-) Détermine le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

4-)

a-) Détermine la nature du triangle ABC.

b-) Détermine l'écriture complexe de g.

c-) Déduis en la nature et les éléments caractéristiques de la similitude de g.

d-) Détermine l'expression analytique de$g$.

e-) Détermine l'image de la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 6 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ par g.

<u>Problème 2</u> :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ de nombre réels strictement positifs, définie par son premier terme $U_2 = e^3$ et pour tout entier naturel n≥ 2 , par la relation de récurrence : $\begin{cases} U_2 = e^3 \\ (U_{n+1})^2 e = U_n \end{cases}$; et la suite V_n définie par : $\forall\, n \geq 2$, $V_n = \frac{1+\ln(U_n)}{2}$.

5a-) Démontre que V_n est une suite géométrique dont tu préciseras la raison.

b-) Exprime V_n puis U_n en fonction de n.

6a-) (V_n) et (U_n) sont-elles convergentes ?

b-) Détermine en fonction de n la somme $S_n = V_2 + V_3 + \cdots + V_n$.

c-) Calcule $P_n = U_2U_3U_4 \ldots U_n$ où $P_2 = U_2$.

7a-)Dresse le tableau des effectifs de chaque série marginale.

y \ x	1	2	3	4
123	3	0	0	2
125	5	2	4	1
128	2	1	0	6
129	0	2	1	1
130	0	1	1	0

b-) Détermine le coefficient de corrélation linéaire puis interprète le résultat obtenu.

Problème 3 :

La trajectoire décrite par la boule tombée au cours d'un tirage est assimilable à celle de la fonction du temps x où f est la fonction numérique de variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x) = \exp[(x+1)lnx] \; si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

8-) Soit u la fonction numérique définie par $u(x) = \frac{x+1}{x} + \ln(x)$.

a-) Etudie les variations de u.

b-) Déduis en le signe de $u(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

c-) Détermine l'ensemble de définition de f.

d-) Démontre que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = e^{xlnx}$.

9-a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b-) Etudie les variations de f.

c-) Etudie la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

d-) Tr ace soigneusement la courbe de f.

e-) Détermine en utilisant la méthode des trapèzes l'aire qu'occupe le trophée prévue pour le meilleur.

FIN

Composition de la 1ere D

Contexte : Implantation d'une entreprise

Sogbo est un ancien agronome qui décide d'implanté une entreprise de vente de volailles. Le terrain prévu pour implanter l'entreprise a la forme d'un parallélogramme.

L'entrepreneur chargé de réalisation du projet propose deux budgets comparatifs.

La trajectoire utilisée pour accéder au terrain est la portion de la courbe représentative de la fonction f.

Sogbo ayant de difficulté pour faire le choix du budget et aussi avoir une idée sur la nature de la trajectoire.

Tâche : tu vas aider Sobgo travers la résolution des problèmes suivants.

Problème 1 :

1-) Ecris plus simplement

$A = \sin(x+\pi) - \sin(x-\pi) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \sin(x - \frac{\pi}{2})$

$B = \sqrt{2}\sin\left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + sin(\frac{-5\pi}{2} - \frac{\pi}{4}).$

$C = \tan\left(\frac{-7\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}+x)} + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{1}{\tan(\frac{7\pi}{2}-x)}.$

2-)Démontre que :

a-) $(1 + sinx + cosx)^2 = 2(1 + sinx)(1 + cosx).$

b-) $sin^6x + cos^6x = 1 - 3sin^2xcos^2x.$

c-) $\frac{2+sin2x-2cos2x}{1+3sin^2x-cos2x} = \frac{2}{5}(2 + \frac{1}{tanx})$

3-) Résous dans $\mathbb{R}$,

a-) $(2sin5x - 1)\left(cos3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$

b-) $cos^2 2x - \sqrt{3}cos2x + \frac{3}{4} = 0.$

4-) Calcule

a-) $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{\sqrt{1+sinx}-1}{sin2x})$,

b-) $\lim\limits_{x \to +\infty} xsin\frac{1}{x}$

5-) $ABCD$ est parallélogramme de centre O et $S = \{(A; 4m-2), (B, m+1), (C; 2m), (D; 3m-1)\ \}$.

a-) Détermine la valeur de m pour laquelle S n'admet pas de barycentre.

b-) Détermine l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles S admet de barycentre G_m.

6-) Pour la suite on pose $m = 1$ et on donne $A(-3; -1), B(2; -1), C(5; 2), D(0; 2)$ dans le plan munit du repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a-) Démontre que $G_1 = O$.

b-) Détermine les coordonnées du point G_1.

c-) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que :

$* \ \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

$* \ \vec{u}\ et\ \vec{v}$ Soit colinéaires , où $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.

<u>Problème 2</u> :

Des budgets comparatifs $B1$ et $B2$ ont été proposés à l'entreprise.

$B1 = |S_9|$ et $B2 = |S'_9|$ où $S_9 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$ et $S'_9 = t_0 + t_1 + \cdots + t_9$

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+6}{u_n+2} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}\ .\ v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$, $\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{4w_n - 1}{4w_n} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1}{w_n - \frac{1}{2}}$

7-a) Démontre que si la suite (u_n) converge vers un nombre réel, alors α est une racine du polynôme $(x) = x^2 + x - 6$.

b-) Détermine les racines du polynôme p, on les notera a et b avec a > b.

8-a) Démontre que la suite v_n est géométrique dont tu donneras sa raison et son premier.

b-) Exprime v_n et $u_n$en fonction de n puis déduis en la limite de u_n.

9-a) Démontre que la suite t_n est arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

b-) Déduis en le budget le plus avantageux.

<u>Problème 3 :</u>

La courbe des représentations graphiques (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}\,\vec{\jmath}$) de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}\ , si\ x \leq 1 \\ f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}\ , \qquad si\ x > 1 \end{cases}$

10-a) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction f.

b-) Etudie la continuité de f en 1 et en 0.

c-) Calcule les limites aux bornes de D.

11-a) Etudie la dérivabilité de f en -1, et en 1 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b-) Détermine l'ensemble de dérivabilité de f.

12-a) Démontre que $\forall\ x \in \left]-1,1\right[, f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

b-) Etudie le signe de $f'(x)$ sur : $\left]-1,1\right[$ et sur $\left]1,+\infty\right[$.

c-) Dresse le tableau des variations de f sur D.

13 a-) Etudie les branches infinies de (C) puis trace soigneusement la courbe (C) de f dans le repère (O ;$\vec{\imath}$ $\vec{\jmath}$).

b-) Trace dans le même repère la courbe de la fonction g définie $\left]1,+\infty\right[$ par $g(x) = |f(x)|$.

FIN