TRAVAUX DIRIGES 2024-2025

Organisés par la Mairie de Cotonou
Sous le haut patronage du Maire *Luc Sètondji ATROKPO*

BAC : 2025

Classe : Terminales D **TD du 07 / 05 / 2025**
Durée : 3h

EPREUVE : MATHEMTIQUES

Contexte : Visite d'une ferme agricole

Lors d'une sortie pédagogique des élèves de la classe de terminale D d'un complexe scolaire privé, Sognonvi et ses camarades ont visité la ferme agricole FONDEOU. Des nombreuses explications du responsable de la ferme, Sognonvi a retenu que :

- dans la salle d'exposition d'échantillons de produits récoltés sur la ferme, où l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les différentes variétés de tomate sont étalées sur une surface contenue dans un plan (Q) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + \sqrt{2} \\ y = -3\beta + \pi \\ z = -1 \end{cases}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$;
- les différentes variétés d'oignon sont accrochées à une tige portée par l'ensemble (Δ) des points $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $(x-y+z-2)^2+(2x+y-z+1)^2=0$;
- un mur de la salle contenu dans un plan (P) est bien décoré à l'aide de certaines figures planes et de leurs images par une transformation plane φ précise ;
- les allées de la ferme sont assimilables à des portions d'une courbe (C) représentative des variations d'une fonction numérique f d'une variable réelle dans un plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$;
- à partir d'un certain moment, la productivité annuelle des nombreux cocotiers se trouvant dans la ferme n'est plus systématiquement croissante.

Autant sidéré comme ses camarades par les explications reçues, Sognonvi se pose néanmoins certaines questions notamment sur la nature de la transformation plane, l'allure de (C) et la production annuelle à long terme en noix de coco sur la ferme.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Sognonvi à répondre à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1) Détermine une équation cartésienne du plan (Q).
2)
   a) Démontre que l'ensemble (Δ) est une droite.
   b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ).
3) Détermine l'intersection de (Q) et (Δ).

Problème 2

Le plan (P) du mur décoré est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et la transformation plane φ est la composée de l'homothétie h de centre $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rapport -2, et d'une application r de (P) dans (P) qui, à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que $x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$.

4)
   a) Détermine l'écriture complexe de l'application r.
   b) Donne la nature précise de r puis précise ses éléments caractéristiques.
   c) Détermine la nature du triangle KAB où A est un point distinct de K, d'image B par r.

5)
   a) Détermine l'écriture complexe de $h \circ r$.
   b) Prouve que φ est une similitude plane directe dont tu préciseras les éléments caractéristiques.
   c) Sachant que A est un point de l'axe $(\Omega; \vec{e}_1)$ d'abscisse comprise entre 1 et 2, construis le triangle KAB puis son image par φ.

Problème 3

En réalité f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 lnx - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2} & si\ x > 0. \end{cases}$

Partie A

Le domaine de la ferme compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$et $x = e$ est couvert exclusivement de cultures maraichères.

6)
   a) Démontre que l'ensemble de définition de $f$est $\mathbb{R}$.
   b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   c) Donne une interprétation de la dérivabilité de f en 0.

7)
   a) Etudie les variations de la fonction f.
   b) Etudie les branches infinies de la courbe (C).
   c) Construis la courbe (C).

8) Calcule en unité d'aire, l'aire de la surface occupée par les cultures maraichères.

Partie B

Le responsable de la ferme FONDEOU estime qu'à partir de l'année 2010, la production annuelle de la ferme en noix de coco de l'année $(2010 + n)$ en million de francs est d'environ $|u_n|$ où u_n est défini par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ , \forall\ n \in\ \mathbb{N}. \end{cases}$

9) Calcule les montants de la production annuelle de noix de coco en 2010 et en 2011.

10)

a) Etudie le sens de variation de la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $\mathrm{g}(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$.
b) Démontre que l'équation $\mathrm{g}(x) = 2$ admet une solution unique x_0.
c) Prouve que $-2 < x_0 < -1$.
d) Vérifie que $x_0 = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$.

11)

a) Démontre que pour tout élément x de $\mathrm{I} = [-2, -1]$, $f(x)$appartient à I.
b) Démontre que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$.
c) Utilise le théorème de l'inégalité des accroissements finis pour montrer que pour tout élément x de I, on a $|f(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$.

12)

a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.
b) Prouve alors que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$.
c) Déduis – en que pour tout entier naturel n, $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
d) Autour de quel montant stabilisera à long terme la production annuelle de noix de coco si d'autres plants de cocotiers n'étaient plus mis en terre sur la ferme?

-FIN-