

Contexte :

Les autorités de la commune de Djougou envisagent de réhabiliter l'hôpital de la commune. Cissé est un urbaniste qualifié sollicité pour réaliser le projet. Dans son plan, il est prévu la réhabilitation de trois départements principaux à savoir, le département des urgences, le département de la cardiographie et le département des accouchements. Les bâtiments prévus pour abriter chacun de ses départements sont positionnés en trois points A , B et C dont les affixes sont solutions de l'équation paramétrique $(E_m): R(z) = 0$ où $R(z)$ est le polynôme défini dans l'ensemble des nombres complexes par $R(z) = z^3 - [m + (2 + m)i]z^2 + \left[-m + \frac{1}{2}(1 + 4m)i\right]z - 2mi + 1$ avec m un paramètre réel. Il est aussi prévu une toilette positionnée en un point D , image du point B par la similitude plane directe S de centre A de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. La valeur qui correspond aux frais de souscription du projet, exprimée en centaine de milliers de francs CFA, est la limite de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = P(u_n); n \geq 0 \end{cases}$ où P est la fonction numérique définie sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $P(x) = \frac{4x-2}{1+x}$.

Lors de la présentation du projet aux autorités communales le maire décide de donner de pizzas à tous ceux qui étaient présents. Il lance la commande à une pâtisserie située à 6km de la maison où se fait la présentation. Le maire exige d'être servi à 20h précisément. Le livreur de pizzas quitte la pâtisserie à 19h49min.

Cissé décide de connaître les valeurs de m pour lesquelles ABC est un triangle rectangle en A . Pour cela, il cherche à déterminer les affixes des points A, B, C et D et s'intéresse aussi au frais de souscription des entreprises au projet. Il sollicite l'aide de sa fille Wassila, élève en classe de terminale scientifique.

Tâche : Aide Cissé et sa fille dans ce projet en résolvant chacun des trois problèmes suivants.

Problème 1

1. Soit $Q(z) = z^2 - m(1 + i)z + m + \frac{1}{2}i$, un polynôme complexe.

a) Justifie que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E_m) .

b) Démontre que $\forall m \in \mathbb{R}, R(z) = (z - 2i)Q(z)$.

2. a) Calcule $[(m - 1) + i(m + 1)]^2$ et démontre que $\forall m \in \mathbb{R}$, l'équation $Q(z) = 0$ admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 que tu détermineras.
- b) Résous dans \mathbb{C} , l'équation (E_m) suivant les valeurs du paramètre réel m .
3. On désigne par $z_0 = 2i$, $z_1 = \frac{1}{2}(1 - i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(1 + i)(2m + i)$ les affixes respectives des points A , B et C . Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- a) Justifie que $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{1}{26}(-8m + 14) + \frac{1}{26}i(12m - 8)$.
- b) Dédus-en la valeur de m pour que le triangle ABC soit rectangle en A .
- c) Détermine l'écriture complexe de S .
- d) Détermine l'affixe du point D .

Problème 2

Pour le déplacement le livreur utilise un scooter qui roule constamment à 36km/h . (On néglige les phases d'accélération et de décélération).

Sur son trajet il va rencontrer deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

S'il arrive à un feu orange il s'arrête 60 secondes et repart.

S'il arrive à un feu rouge il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$.
- la probabilité d'être rouge à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

Soit T la variable aléatoire "temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination".

4. a) Calculer, en justifiant le calcul, la probabilité $P(T = 11)$.

b) Donner la loi de probabilité de T .

5. Calculer l'espérance mathématique de T .

6. Le livreur part à 19h49.

a) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en retard ?

b) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en avance ?

7. Etudie le sens de variation de P .

8. a) Demontre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{3}{2}$.

b) Démontre que la suite (u_n) est décroissante.

c) Dédus-en que la suite (u_n) est convergente.

9. Détermine la valeur correspondant aux frais de souscription des entreprises au projet.

Problème 3

En réalité, l'hôpital est traversé par une voie. Elle est matérialisée dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ par une portion de la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$

10. a) Etudie les variations de g .

b) Dédus-en que $\forall x \in]0; +\infty[; 0 < g(x) < 1$.

11. a) Justifie que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0 et interprète géométriquement les résultats obtenus.

12. a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2 - g(x)$.

b) Etudie les variations de f .

13. Démontre que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$ dont tu détermineras une équation.

14. Construis la courbe (C) de f . Unité graphique : $2cm$.