

DEVOIR DU TROISIEME TRIMESTRE

Epreuve : Mathématiques

Contexte : La visite d'une verrerie

Cogito, un élève en classe de 1^{ère} C, en visite dans la verrerie de son oncle a eu la chance d'assister de bout en bout à la fabrication d'un bel objet d'ornement (Σ) ayant la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête de longueur **1 ul** sur lequel, est placée au point $K(0 ; n ; 1)$ une enseigne lumineuse mobile telle que $n \in \mathbb{R}$ et $d(E, (KFD)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ul dans l'espace muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

- Sur l'une des faces de (Σ), est inscrit quatre nombres entiers relatifs α, β, γ et λ qui sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 telle que : $\alpha \times \beta \times \gamma \times \lambda = 385$ et sur la face opposée figure un motif de décoration constitué d'un triangle PQR rectangle en P tel que $QR = 2a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et des ensembles (π) et (π')
- Sur une autre face de (Σ) est représenté un motif de décoration dont l'allure (Γ) est l'image de la représentation graphique d'une fonction f appartenant à une famille de fonctions numériques

Cogito a aussi découvert que son oncle enregistre tous ses clients sous des numéros constitués de deux lettres choisi dans l'ensemble des voyelles de l'alphabet français suivi de quatre chiffres puis l'oncle lui a également affirmé que, l'enseigne lumineuse peut se retrouver en H ou en G

De retour à la maison, **Cogito** s'est intéressé à l'affirmation de son oncle sur la position de l'enseigne lumineuse ; aux différentes valeurs de α, β, γ et λ ; le nombre de clients que son oncle peut enregistrer ; aux ensembles (π) et (π') et désire savoir comment obtenir (Γ)

Tâche : Tu es invité(e) à te joindre à **Cogito** pour trouver des réponses à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) Détermine les valeurs de α, β, γ et λ
- 2) Calcule le nombre de clients que l'oncle de **Cogito** peut enregistrer :
 - a) si les lettres et les chiffres sont quelconques ;
 - b) si les numéros sont constitués de deux lettres choisis successivement et distinctes suivi d'un nombre supérieur ou égal à 1000 ;
 - c) si dans les numéros on compte exactement une lettre et deux chiffres.
- 3) a) Démontre que les points K, F et D définissent un plan dont une équation cartésienne est : $(n - 1)x + y - nz = 0$.
 b) Détermine n puis précise les différentes positions du point K.
 c) L'affirmation de l'oncle de **Cogito** est-elle vraie ?

Problème 2

Dans le plan $(\mathcal{P})$ de la face de (Σ) où figure le motif constitué d'un triangle PQR rectangle en P tel que $QR = 2a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$), l'ensemble (π) est l'ensemble des points M de $(\mathcal{P})$ tels que $4MP^2 - MQ^2 - MR^2 = -4a^2$ et l'ensemble (π') est l'image de (π) par l'application $g = g_2 \circ g_1$ où g_1 est l'homothétie de centre P et de rapport 2 et g_2 est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $2\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$

4) Soit S le barycentre des points pondérés $\{(P; 4), (Q; -1), (R; -1)\}$

a) Démontre que le point S et le milieu I du segment $[QR]$ sont symétriques par rapport à P

b) Démontre que pour tout point M du plan $(\mathcal{P})$, on a :

$$4MP^2 - MQ^2 - MR^2 = 2MS^2 + 4SP^2 - SQ^2 - SR^2$$

c) Justifie que $PT = \frac{QR}{2}$ et que $SQ^2 + SR^2 = 2SP^2 + \frac{QR^2}{2}$.

d) Détermine l'ensemble (π)

5) a) Détermine la nature et le ou les élément(s) caractéristiques de g_2

b) Détermine $g(P)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de g.

c) Déduis-en l'ensemble (π')

Problème 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Γ) est la courbe de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = f(-x + 1) - 2$ où f est obtenue à partir de la famille f_m des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : **$f_m(x) = (m - 1)x^2 + mx - 2m + 3$ de courbes (T_m) telle que $f(x) = \frac{f_2(x) - 4(x-1)}{2-x}$** où m est un paramètre réel

6) Démontre que les courbes (T_m) passe par deux points fixes dont tu préciseras les coordonnées.

7) a) Vérifie que $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2 - x}$

b) Etudie les variations de f

c) Construis la représentation graphique (C_f) de f

8) Démontre que le point d'intersection des asymptotes de (C_f) est un centre de symétrie de (C_f)

9) Résous graphiquement suivant les valeurs de m l'équation $x^2 + (m - 2)x - 2m + 3 = 0$

10) a) Détermine l'ensemble de définition de h

b) Démontre que (Γ) est l'image de (C_f) par un antidéplacement d à précise

c) Détermine l'expression analytique de d